Sobre o Limiar para a Produção de Pares e Localização de Partículas sem Spin

On the Threshold for the Pair Production and Localization of Spinless Particles

Tatiana R. Cardoso e Antonio S. de Castro[1]

UNESP - Campus de Guaratinguetá
Departamento de Física e Química
12516-410 Guaratinguetá SP - Brasil

[1]E-mail: castro@pesquisador.cnpq.br.

Resumo

A equação de Klein-Gordon em uma dimensão espacial é investigada com a mais geral estrutura de Lorentz para os potenciais externos. A análise do espalhamento de partículas em um potencial degrau com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar revela que o acoplamento escalar contribui para aumentar o limiar da energia de produção de pares. Mostra-se ainda que a produção de pares torna-se factível somente quando o acoplamento vetorial excede o acoplamento escalar. Um aparente paradoxo relacionado com a localização de uma partícula em uma região do espaço arbitrariamente pequena, devido à presença do potencial escalar, é resolvido com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo.

Palavras-chave: equação de Klein-Gordon, paradoxo de Klein, produção de pares, localização, comprimento de onda Compton

The one-dimensional Klein-Gordon equation is investigated with the most general Lorentz structure for the external potentials. The analysis of the scattering of particles in a step potential with an arbitrary mixing of vector and scalar couplings reveals that the scalar coupling contributes for increasing the threshold energy for the particle-antiparticle pair production. Furthermore, it is shown that the pair production is only feasible whether the vector coupling exceeds the scalar one. An apparent paradox concerning the localization of a particle in an arbitrarily small region of space, due to the presence of the scalar coupling, is solved by introducing the concept of effective Compton wavelength.

Keywords: Klein-Gordon equation, Klein´s paradox, pair production, localization, Compton wavelength

1 Introdução

A generalização da mecânica quântica que inclui a relatividade especial é necessária para a descrição de fenômenos em altas energias e também para a descrição de fenômenos em escalas de comprimentos que são menores ou comparáveis com o comprimento de onda Compton da partícula ($\lambda = \hbar/(mc)$). A generalização não é uma tarefa trivial e novos e peculiares fenômenos surgem na Mecânica Quântica Relativística (doravante denominada MQR). Entre tais fenômenos estão a produção espontânea de pares matéria-antimatéria e a limitação para a localização de partículas. Essa limitação pode ser estimada pela observação que a máxima incerteza para o momento da partícula $\Delta p = mc$ conduz, via princípio da incerteza de Heisenberg, à incerteza mínima na posição $\Delta x = \lambda/2$ [1]-[2]. Embora a MQR como modelo de partícula única, referida como formalismo de primeira quantização, não possa dar conta da completa descrição da criação de pares, ela pavimenta o caminho para o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos.

As mais simples equações da MQR são a equação de Klein-Gordon (EKG)[1] e a equação de Dirac[2]. O spin é uma complicação adicional na MQR e, naturalmente, a EKG permite que certos aspectos da MQR possam ser analisados com um formalismo matemático mais simples e percebidos com maior transparência. A solução da equação de Dirac para o espalhamento de partículas em um potencial degrau, considerado como o componente temporal de um potencial vetorial, é bem conhecida e cristalizada em livros-texto [1]-[5]. Neste problema surge o célebre paradoxo de Klein [6] para potenciais suficientemente intensos, um fenômeno em que o coeficiente de reflexão excede a unidade e é interpretado como sendo devido à criação de pares na interface do potencial. A análise do problema consoante a EKG não foi esquecida [5], [7]-[11].

Neste trabalho analisamos a EKG unidimensional com interações externas com a mais geral estrutura de Lorentz, i. e., consideramos potenciais com estrutura vetorial, com componentes espacial e temporal, acrescido de uma estrutura escalar. Em seguida exploramos as soluções para o espalhamento de partículas em um potencial degrau com acoplamento geral, por assim dizer, com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar. Verificamos que tal mistura de acoplamentos conduz a resultados surpreendentes. Para além de aumentar o limiar de energia para a produção espontânea de pares, podendo até mesmo frustrar a produção ainda que os potenciais sejam extremamente fortes, a presença de um acoplamento escalar permite que uma partícula possa ser localizada em uma região do espaço arbitrariamente pequena sem ameaçar a interpretação de partícula única da EKG. A aparente violação do princípio da incerteza é remediada com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo.

Apesar da originalidade e generalidade, este trabalho é acessível aos estudantes de

[1] A EKG descreve o comportamento de bósons de spin 0. Píons e káons, por exemplo.

[2] A equação de Dirac descreve o comportamento de férmions de spin 1/2, tais como o elétron, o neutrino, o quark, o próton e o nêutron.

graduação em física que tenham freqüentado alguns poucos meses de um curso introdutório de mecânica quântica. Dessa forma permite-se o acesso precoce de estudantes a alguns dos mais interessantes fenômenos da MQR.

2 A equação de Klein-Gordon

A EKG unidimensional para uma partícula livre de massa de repouso m corresponde à relação energia-momento relativística $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$, onde a energia E e o momento p tornam-se operadores, $i\hbar\,\partial/\partial t$ e $-i\hbar\,\partial/\partial x$ respectivamente, atuando sobre a função de onda $\Phi(x,t)$. Aqui, c é a velocidade da luz e $\hbar$ é a constante de Planck ($\hbar = h/(2\pi)$).

Na presença de potenciais externos a relação energia-momento torna-se

$$(E - V_t)^2 = c^2\left(p - \frac{V_e}{c}\right)^2 + \left(mc^2 + V_s\right)^2 \tag{1}$$

onde os subscritos nos termos dos potenciais denotam suas propriedades com respeito às transformações de Lorentz: t e e para os componentes temporal e espacial de um potencial vetorial[3], e s para um potencial escalar[4].

A equação da continuidade para a EKG

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

é satisfeita com ρ e J definidos como

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^*}{\partial t}\Phi\right) - \frac{V_t}{mc^2}\left|\Phi\right|^2 \\
J &= \frac{\hbar}{2im}\left(\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\Phi\right) - \frac{V_e}{mc}\left|\Phi\right|^2
\end{aligned} \tag{3}$$

Vale a pena observar o modo que os componentes do potencial vetorial participam da densidade ρ e da corrente J, tanto quanto a ausência do potencial escalar. Observa-se também que a densidade envolve derivadas temporais, um fato relacionado com a derivada temporal de segunda ordem na EKG, e pode admitir valores negativos mesmo no caso de uma partícula livre. Assim sendo ρ não pode ser interpretada

[3] A energia e o momento são os componentes temporal e espacial, respectivamente, da quantidade $(E/c\,,\,p)$, a qual se comporta, segundo as transformações de Lorentz, como um vetor. O potencial vetorial, com componentes $(V_t\,,\,V_e)$, é acoplado à partícula de acordo com o *princípio do acoplamento mínimo*, também chamado de *princípio da substituição mínima*, $E \to E - V_t$ e $p \to p - V_e/c$, como é habitual no caso da interação eletromagnética.

[4] A massa de repouso é uma quantidade invariante de Lorentz, i. e., uma quantidade escalar. O potencial escalar foi acoplado à partícula em (1) de acordo com o *princípio do acoplamento mínimo* $m \to m + V_s/c^2$. Esta prescrição fornece o limite não-relativístico apropriado da EKG, conforme veremos adiante, em contraste com a regra $m^2 \to m^2 + V_s^2/c^4$ empregada na Ref. [1].

como uma densidade de probabilidade. Contudo, Pauli e Weisskopf [12] mostraram que não há dificuldade com a interpretação da densidade e da corrente da EKG se essas grandezas forem interpretadas como densidade e corrente de *carga*, ao invés de densidade e corrente de probabilidade. A *carga* não deve ser pensada necessariamente como carga elétrica, mas como carga generalizada que satisfaz uma lei de conservação aditiva, por assim dizer que a *carga* de um sistema é a soma das *cargas* de suas partes constituintes.

Para potenciais externos independentes do tempo, a EKG admite soluções da forma

$$\Phi(x,t) = \phi(x)\, e^{i\Lambda(x)}\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{4}$$

onde ϕ obedece a uma equação similar em forma à equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{V_s^2 - V_t^2}{2mc^2} + V_s + \frac{E}{mc^2}\, V_t\right)\phi = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}\,\phi \tag{5}$$

com $\Lambda(x) = \int^x dy\, V_e(y)/(\hbar c)$. A eliminação do componente espacial do potencial vetorial é equivalente a uma redefinição do operador momento. Realmente,

$$\left(p_{op} - \frac{V_e}{c}\right)^2 \Phi = e^{i\Lambda}\, p_{op}^2\, \phi \tag{6}$$

É agora importante perceber que há soluções de energia positiva tanto quanto soluções de energia negativa[5] e que os dois possíveis sinais para E implicam em duas possibilidades para a evolução temporal da função de onda. Seja como for, a energia é uma quantidade conservada. A forma da equação de autovalor (5) é preservada sob as transformações simultâneas $E \to -E$ e $V_t \to -V_t$, e isto implica que partículas e antipartículas estão sujeitas a componentes temporais de um potencial vetorial com sinais dissimilares. Como conseqüência imediata dessa covariância tem-se que, por mais estranho que possa parecer, partículas e antipartículas compartilham exatamente a mesma autofunção no caso de um potencial puramente escalar e que o espectro é disposto simetricamente em torno de $E = 0$. *Cargas* positivas e negativas estão sujeitas a acoplamentos vetoriais (componentes temporais) de sinais contrários e igual acoplamento escalar. A interação escalar é independente da *carga* e assim age indiscriminadamente sobre partículas e antipartículas. Diz-se então que o potencial vetorial acopla com a *carga* da partícula e que o potencial escalar acopla com a massa da partícula. A densidade e a corrente correspondentes à solução expressa por (4) tornam-se

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E - V_t}{mc^2}\,|\phi|^2 \\ J &= \frac{\hbar}{2im}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi^*}{\partial x}\phi\right) \end{aligned} \tag{7}$$

[5] As soluções de energia positiva e negativa são assossiadas com partículas e antipartículas, respectivamente.

Em virtude de ρ e J serem independentes do tempo, a solução (4) é dita descrever um estado estacionário. Nota-se que a densidade torna-se negativa em regiões do espaço onde $V_t > E$ e que o componente espacial do potencial vetorial não mais intervém na corrente.

Ademais, deve-se mencionar que a EKG reduz-se à equação de Schrödinger no limite não-relativístico ($E \simeq mc^2$ e energias potenciais pequenas comparadas com mc^2) com ϕ obedecendo à equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(V_t + V_s\right)\phi = \left(E - mc^2\right)\phi \tag{8}$$

No limite não-relativístico as naturezas de Lorentz dos potenciais não sofrem quaisquer distinções, e a densidade e a corrente reduzem-se exatamente aos valores da teoria não-relativística.

3 A solução para um potencial degrau

Vamos agora considerar a EKG com os potenciais externos independentes do tempo na forma de um degrau de potencial. Consideramos $V_e = 0$, haja vista que o componente espacial do potencial vetorial contribui apenas com um fator de fase local para $\Phi(x,t)$ e não contribui para a densidade nem para a corrente. O potencial degrau é expresso como

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ V_0 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases} \tag{9}$$

onde $V_0 > 0$. Os potenciais vetorial e escalar são escritos como $V_t(x) = g_t V(x)$ e $V_s(x) = g_s V(x)$ de tal forma que as constantes de acoplamento estão sujeitas ao vínculo $g_t + g_s = 1$, com $g_t \geq 0$ e $g_s \geq 0$.

Para $x < 0$, a EKG apresenta soluções na forma de uma soma de autofunções do operador momento:

$$\phi = A_+\, e^{+ikx} + A_-\, e^{-ikx} \tag{10}$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c} \tag{11}$$

Para $|E| > mc^2$, a solução expressa por (10) reverte-se em ondas planas propagando-se em ambos os sentidos do eixo X com velocidade de grupo[6]

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} \tag{12}$$

igual à velocidade clássica da partícula. Se escolhermos partículas incidindo sobre a barreira de potencial ($E > mc^2$) teremos que $A_+\, e^{+ikx}$ descreve partículas incidentes ($v_g = c^2\hbar k/E > 0$), enquanto $A_-\, e^{-ikx}$ descreve partículas refletidas

[6]Veja, e.g., Refs. [1] e [5].

($v_g = -c^2\hbar k/E < 0$). A corrente nesta região do espaço, correspondendo a ϕ dada por (10), é expressa por

$$J = \frac{\hbar k}{m}\left(|A_+|^2 - |A_-|^2\right) \tag{13}$$

Observe que a relação $J = \rho\, v_g$ mantém-se tanto para a onda incidente quanto para a onda refletida pois

$$\rho = \frac{E}{mc^2}\,|\phi|^2 > 0 \tag{14}$$

Por outro lado, para $x > 0$ devemos ter $v_g \geq 0$ de forma que a solução nesta região do espaço descreve uma onda evanescente ou uma onda progressiva que se afasta da interface do potencial. A solução geral tem a forma

$$\phi = B_+\, e^{+i\kappa x} + B_-\, e^{-i\kappa x} \tag{15}$$

onde

$$\kappa = \frac{\sqrt{\left(E - g_t V_0\right)^2 - \left(mc^2 + g_s V_0\right)^2}}{\hbar c} \tag{16}$$

Por causa da dupla possibilidade de sinais para a energia de um estado estacionário, a solução $B_-\, e^{-i\kappa x}$ não pode ser descartada a priori. De fato, pode-se depreender de (4) que esta parcela pode vir a descrever uma onda progressiva com energia negativa e velocidade de fase $v_f = |E|/(\hbar\kappa) > 0$. Percebe-se claramente que podemos segregar três classes distintas de soluções:

- **Classe A.** Para $V_0 < E - mc^2$ temos que $\kappa \in \mathbb{R}$ e a solução que descreve ondas planas propagando-se no sentido positivo do eixo X com velocidade de grupo

  $$v_g = \frac{c^2\hbar\kappa}{E - g_t V_0} \tag{17}$$

  é possível somente se $B_- = 0$. Neste caso, a densidade e a corrente são dadas por

  $$\rho = \frac{E - g_t V_0}{mc^2}\,|B_+|^2 \quad \text{e} \quad J = \frac{\hbar\kappa}{m}\,|B_+|^2 \tag{18}$$

- **Classe B.** Para $E - mc^2 < V_0 < V_c$, onde

  $$V_c = \begin{cases} \frac{E+mc^2}{2g_t-1} & \text{para } g_t > \frac{1}{2} \\ \infty & \text{para } g_t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{19}$$

  temos que $\kappa = i|\kappa|$ de forma que (15), com $B_- = 0$[7], descreve uma onda evanescente. Neste caso,

  $$\rho = \frac{E - g_t V_0}{mc^2}\,|B_+|^2\, e^{-2|\kappa| x} \quad \text{e} \quad J = 0 \tag{20}$$

[7] A condição $B_- = 0$ é necessária para que a densidade seja finita quando $x \to +\infty$.

- **Classe C.** $V_0 > V_c$, com V_c concebido na classe **B**, surge mais uma vez a possibilidade de propagação no sentido positivo do eixo X, desta feita com $B_+ = 0$, com velocidade de grupo

$$v_g = \frac{c^2 \hbar \kappa}{g_t V_0 - E} \tag{21}$$

Nesta circunstância em que o acoplamento vetorial excede o acoplamento escalar nos defrontamos com um caso bizarro, pois tanto a densidade quanto a corrente são quantidades negativas, viz.

$$\rho = \frac{E - g_t V_0}{mc^2} |B_-|^2 \quad \text{e} \quad J = -\frac{\hbar \kappa}{m} |B_-|^2 \tag{22}$$

A mantença da relação $J = \rho\, v_g$, contudo, é uma licença para interpretar $B_-\, e^{-i\kappa x}$ a descrever a propagação, no sentido positivo do eixo X, de partículas com *carga* de sinal contrário ao das partículas incidentes. Esta interpretação é consistente se as partículas propagando-se nessa região têm energia $-E$ e estão sob a influência de um potencial vetorial $-g_t V_0$. Quer dizer, então, que a onda progressiva descreve, de fato, a propagação de antipartículas no sentido positivo do eixo X[8].

3.1 Os coeficientes de reflexão e transmissão

Não obstante a descontinuidade do potencial em $x = 0$, a autofunção e sua derivada primeira são funções contínuas[9]. A demanda por continuidade de ϕ e $d\phi/dx$ fixa as amplitudes de onda em termos da amplitude da onda incidente A_+, viz.

$$\frac{A_-}{A_+} = \begin{cases} \frac{k-\kappa}{k+\kappa} & \text{para a classe } \mathbf{A} \\ \frac{(k-i|\kappa|)^2}{k^2+|\kappa|^2} & \text{para a classe } \mathbf{B} \\ \frac{k+\kappa}{k-\kappa} & \text{para a classe } \mathbf{C} \end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{B_+}{A_+} = \begin{cases} \frac{2k}{k+\kappa} & \text{para a classe } \mathbf{A} \\ \frac{2k(k-i|\kappa|)}{k^2+|\kappa|^2} & \text{para a classe } \mathbf{B} \\ 0 & \text{para a classe } \mathbf{C} \end{cases} \tag{24}$$

[8]Note que partícula e antipartícula têm massas iguais.

[9]Esta conclusão, válida para potenciais com descontinuidades finitas, pode ser obtida pela integração da Eq. (5) entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ no limite $\varepsilon \to 0$. Pode-se verificar, pelo mesmo procedimento, que apenas as autofunções são contínuas quando as descontinuidades dos potenciais são infinitas.

$$\frac{B_-}{A_+} = \begin{cases} 0 & \text{para a classe } \mathbf{A} \\ \\ 0 & \text{para a classe } \mathbf{B} \\ \\ \frac{2k}{k-\kappa} & \text{para a classe } \mathbf{C} \end{cases} \tag{25}$$

Agora focalizamos nossa atenção na determinação dos coeficientes de reflexão R e transmissão T. O coeficiente de reflexão (transmissão) é definido como a razão entre as correntes refletida (transmitida) e incidente. Haja vista que $\partial\rho/\partial t = 0$ para estados estacionários, temos que a corrente é independente de x. Usando este fato obtemos prontamente que

$$R = \frac{|A_-|^2}{|A_+|^2} = \begin{cases} \left(\frac{k-\kappa}{k+\kappa}\right)^2 & \text{para a classe } \mathbf{A} \\ \\ 1 & \text{para a classe } \mathbf{B} \\ \\ \left(\frac{k+\kappa}{k-\kappa}\right)^2 & \text{para a classe } \mathbf{C} \end{cases} \tag{26}$$

$$T = \begin{cases} \frac{\kappa}{k}\frac{|B_+|^2}{|A_+|^2} = \frac{4k\kappa}{(k+\kappa)^2} & \text{para a classe } \mathbf{A} \\ \\ 0 & \text{para a classe } \mathbf{B} \\ \\ -\frac{\kappa}{k}\frac{|B_-|^2}{|A_+|^2} = -\frac{4k\kappa}{(k-\kappa)^2} & \text{para a classe } \mathbf{C} \end{cases} \tag{27}$$

Em todas as classes temos que $R + T = 1$, como deve ser. Entretanto, a classe **C** apresenta $R > 1$, o aludido paradoxo de Klein, implicando que mais partículas são refletidas na barreira de potencial que aquelas incidentes. Tem que ser assim porque, conforme vimos anteriormente, o componente vetorial da barreira de potencial estimula a produção de antipartículas em $x = 0$. Em virtude da conservação da *carga* há, em verdade, a criação de pares partícula-antipartícula e, como o potencial vetorial em $x > 0$ é repulsivo para partículas, elas serão necessariamente refletidas. Não apenas a *carga* é conservada. Visto que os pares produzidos em $x = 0$ têm energias de sinais contrários, conclui-se que a energia também é uma quantidade conservada no processo de criação de pares.

3.2 O limiar para a produção de pares

Da discussão relacionada com as classes **B** e **C**, observa-se que o limiar para a produção de pares é dado por V_c. Donde torna-se evidente que o acoplamento escalar resulta no aumento da energia mínima necessária para a criação de pares partícula-antipartícula. O valor mínimo do limiar ($V_0 = 2mc^2$) ocorre quando o acoplamento é puramente vetorial ($g_t = 1$). A adição de um contaminante escalar contribui para aumentar o valor do limiar, o qual, surpreendentemente, torna-se infinito já para uma mistura meio a meio de acoplamentos. Deste modo, a produção de pares não

é factível se o acoplamento vetorial não exceder o acoplamento escalar, ainda que o potencial V_0 seja extremamente forte.

Pode-se interpretar a possibilidade de propagação de antipartículas além da barreira de potencial como sendo devido ao fato que cada antipartícula está sujeita a um potencial efetivo dado por $(g_s - g_t)\, V_0$, destarte se $g_t > 1/2$ a antipartícula terá uma energia disponível (energia de repouso mais energia cinética) expressa por $(2g_t - 1)\, V_0 - E$, donde se conclui sobre a energia do limiar da produção de pares. Pode-se afirmar ainda que as partículas estão sob a influência de um potencial degrau ascendente de altura $V_0 = (g_s + g_t)\, V_0$, e que as antipartículas estão sujeitas a um potencial degrau efetivo de altura $(g_s - g_t)\, V_0$, um degrau ascendente (repulsivo) se $g_t < 1/2$ e descendente (atrativo) se $g_t > 1/2$.

3.3 A penetração na região classicamente proibida

Investigamos agora o efeito da onda evanescente em $x > 0$, relacionado com a classe **B**. Neste caso, o estado estacionário além da barreira de potencial é descrito pela autofunção $\phi = B_+\, e^{-|\kappa| x}$, de modo que a incerteza na posição, estimada como sendo o valor de x que torna a densidade igual a $1/e$ de seu valor em $x = 0$, redunda em $\Delta x = 1/(2|\kappa|)$, como acontece na teoria quântica não-relativística. Entretanto, contrariamente à previsão da teoria não-relativística, Δx apresenta o valor mínimo

$$(\Delta x)_{\text{min}} = \frac{\hbar}{2\,(mc + g_s V_0/c)} \tag{28}$$

quando V_0 torna-se igual a

$$V_m = \frac{E}{g_t} \tag{29}$$

Por meio desta última expressão vemos que $(\Delta x)_{\text{min}} = \lambda/2$ no caso de um potencial vetorial puro ($g_s = 0$), em harmonia com o príncipio da incerteza. Contudo, podemos concluir que $(\Delta x)_{\text{min}} < \lambda/2$ no caso de um potencial vetorial contaminado com algum acoplamento escalar. À primeira vista isto parece um resultado desatroso por violar o princípio da incerteza de Heisenberg. Liberta-se desta danação considerando-se que o componente escalar do potencial contribui para alterar a massa da partícula. Realmente, definindo a massa efetiva como $m_{\texttt{ef}} = m + g_s V_0/c^2$ segue-se imediatamente que $(\Delta x)_{\text{min}} = \lambda_{\texttt{ef}}/2$ e $(\Delta p)_{\text{max}} = m_{\texttt{ef}} c$, onde o comprimento de onda Compton efetivo é definido como $\lambda_{\texttt{ef}} = \hbar/(m_{\texttt{ef}} c)$.

4 Conclusão

Exploramos a EKG em uma dimensão espacial por motivos de simplicidade. Consideramos potenciais externos com a mais geral estrutura de Lorentz e mostramos que, se a interação escalar é acoplada adequadamente, a EKG independente do tempo reduz-se à equação de Schrödinger independente do tempo no limite não-relativístico.

A análise do potencial degrau com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar mostrou-se muito profícua. Três classes de soluções foram discernidas. Em todas essas três classes, o acoplamento escalar não desempenha papel explícito na determinação da velocidade de grupo, e nenhum papel na determinação da densidade e da corrente.

A mistura arbitrária de acoplamentos no potencial degrau desvelou a inexeqüibilidade do mecanismo da produção espontânea de pares no caso em que $g_t \leq 1/2$, tanto quanto o aumento do limiar da energia de produção no caso em que $g_t > 1/2$. Outrossim, a presença de um acoplamento escalar revelou a possibilidade de localizar partículas em regiões do espaço arbitrariamente pequenas. Com efeito, a presença de um acoplamento escalar, por menor que seja, conduz a $(\Delta x)_{\min} \to 0$ quando $V_0 \to \infty$ sem que haja qualquer chance para a produção de pares na interface dos potenciais. Isto dito tendo em vista que V_m, o potencial que minimiza a incerteza na posição, é sempre menor que V_c, o potencial do limiar da produção espontânea de pares.

O limite não-relativístico da EKG expresso pela Eq. (8), ou seja a equação de Schrödinger com energia de ligação $E-mc^2$, não diferencia o acoplamento vetorial do acoplamento escalar e pressupõe que $V_0 << mc^2$. Portanto, conclui-se seguramente que não há produção de pares ($(V_c)_{\min} = 2mc^2$) nem incerteza mínima na posição ($(V_m)_{\min} = mc^2$) no regime não-relativístico da EKG, como é esperado.

Naturalmente, os coeficientes de reflexão e transmissão para a classe de soluções que envolve a criação de pares foram determinados de maneira aproximada, porquanto descuidou-se da interação *interna* entre partículas e antipartículas.

Finalmente, ainda que haja interações externas extremamente fortes, a inviabilidade do mecanismo de produção de pares no caso em que o acoplamento escalar excede o acoplamento vetorial parece preservar a interpretação do modelo de partícula única da EKG. Entretanto, quando as condições favoráveis ao mecanismo de produção de pares entram em cena, já não se pode mais esperar que o formalismo de primeira quantização seja satisfatório. Ainda que tais condições não se manifestem, resta perguntar qual o papel dos estados associados com as antipartículas. Mesmo na ausência de potenciais externos, qual o mecanismo que evita que haja transições entre o estados de energia positiva pertencentes ao continuum entre $+mc^2$ e $+\infty$, e os estados de energia negativa pertencentes ao continuum entre $-mc^2$ e $-\infty$? Eis aqui exemplos de perguntas que encontram respostas satisfatórias somente no formalismo da segunda quantização da teoria.

Agradecimentos:

Os autores são gratos ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

[1] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations* (Springer-Verlag, Berlim 1990).

[2] P. Strange, *Relativistic Quantum Mechanics with Applications in Condensed Matter and Atomic Physics* (Cambridge University Press, Cambridge 1998).

[3] J.D. Bjorken e S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, Nova Iorque 1964).

[4] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading 1967).

[5] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (Wiley, Nova Iorque 1993).

[6] O. Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929).

[7] R.G. Winter, Am. J. Phys. **27**, 355 (1959).

[8] M.G. Fu e E. Furlani, Am. J. Phys. **50**, 545 (1982).

[9] B.R. Holstein, A. J. Phys. **66**, 507 (1998).

[10] J.-J. Ni, W. Zhou e J. Yan, *Klein Paradox and Antiparticle*, arXiv: quant-ph/9905044.

[11] J. Villavicencio, J. Phys. A **33**, 6061 (2000).

[12] W. Pauli e V.F. Weisskopf, Helv. Phys. Acta **1**, 709 (1934).